

Skript zur Vorlesung Stochastik

(nach einem Skript von Prof. Dr. Friedrich Pukelsheim, Universität
Augsburg und zu Beginn nach einem Skript von Prof. Dr. Ulrich Wellisch,
TH Rosenheim)

Prof. Dr. Wolfgang Bischof

TH Augsburg

23. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

I	Beschreibende Statistik	2
I.1	Stichproben	2
I.2	Häufigkeiten	3
I.3	Skalenniveaus	7
I.4	Empirische Verteilungs- und Quantilfunktion	7
I.5	Empirische Quantile, Quantilintervalle, Quartile	10
I.6	Boxplots	12
I.7	Histogramme	16
I.8	Arithmetisches Mittel, Median und Modalwert	17
I.9	Stichprobenvarianz und -standardabweichung	18
I.10	Korrelation	19
II	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	22
II.1	Ergebnisraum	22
II.2	Ereignissysteme	22
II.3	Wahrscheinlichkeitsmaß	23
II.4	Diskrete Gleichverteilung und Elemente der Kombinatorik	25
III	Ereignissysteme	27
III.1	Axiome des Messens	27
III.2	Klassisches Inhaltsproblem und klassisches Maßproblem	27
III.3	Erzeugte Ereignissysteme	27
III.4	Der eukl. Raum $\mathbb{R}^k$ als Grundraum	28
III.5	Halbringsystem	28
III.6	Erzeugersysteme von $\mathbb{B}^k$	29
III.7	Spursysteme	29
III.8	Produktsysteme	30
III.9	Produkteigenschaft der Borelsysteme $\mathbb{B}^k$	30
IV	Vom Inhalt zum Maß	31
IV.1	$\overline{\mathbb{R}}$ als Fortsetzung von $\mathbb{R}$	31
IV.2	Inhalt, Prämaß, Maß	31
IV.3	Monotonie	31
IV.4	Inhalte auf Ringen	32
IV.5	Übersicht	32
IV.6	Stetigkeitssatz für Inhalte auf Ringen	32
IV.7	Fortsetzungssatz von Carathéodory	33
IV.8	Sigmaendlichkeit, Endlichkeit, Normiertheit	33
IV.9	Eindeutigkeitssatz	34
IV.10	Negativ-Beispiele	34
V	Maße und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{B}$	35
V.1	Korrespondenzsatz für endliche Inhalte auf $\mathbb{H}$	35
V.2	Korrespondenzsatz für endliche Prämaße auf $\mathbb{H}$	36
V.3	Korrespondenzsatz für Maße auf $\mathbb{B}$, die auf $\mathbb{H}$ endlich bleiben	36
V.4	Das Lebesguemaß auf $\mathbb{B}$	36
V.5	Korrespondenzsatz für Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $\mathbb{R}$	37
V.6	Die N_{μ, σ^2} -Verteilung auf $\mathbb{B}$	37
V.7	Die χ_f^2 -Verteilung auf $\mathbb{B}$	37

V.8	Die Gleichverteilung auf $\mathbb{B}$	38
V.9	Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{B}$	38
VI	Wahrscheinlichkeitsräume	40
VI.1	Definition	40
VI.2	Rechenregeln (vgl. Satz II.3.2)	40
VI.3	Wechsel des Bezugs auf das Ganze	41
VI.4	Multiplikationssatz	41
VI.5	Satz von der totalen Zerlegung	42
VI.6	Korollar (Bayes-Formel)	42
VI.7	Stochastische Unabhängigkeit	42
VI.8	Induzierte stoch. Unabhängigkeit	43
VI.9	Übergang zum Komplement	43
VI.10	Beispiel	43
VII	Zufallsvariable und ihre Verteilung	45
VII.1	Definition	45
VII.2	Rechtfertigung der Namensgebung	45
VII.3	Binomial-Verteilung und geometrische Verteilung	46
VII.4	Standard-N-Vtlg. und χ^2 -Vtlg.	47
VII.5	$\mathbb{R}$ -we ZV	47
VII.6	Stochastisch unabhängige ZVn	48
VII.7	Faltung	49
VII.8	Exkurs: Regeln zum Binomialkoeffizient	49
VII.9	Identisch verteilte ZV.e	50
VII.10	Der u.i.v. Fall	50
VIII	Lebesgue-Integrale	51
VIII.1	Messbare Funktionen	51
VIII.2	Messbare Indikatorfunktionen	51
VIII.3	Überblick	52
VIII.4	Elementare Integranden (E)	52
VIII.5	Rechenregeln für elem. Integranden	53
VIII.6	Nichtneg. Fktn.	54
VIII.7	Der $\mathbb{R}$ -VR der messbaren $\mathbb{R}$ -we. Fktn.	54
VIII.8	Nichtnegative messbare Integranden (N)	55
VIII.9	Olympia-Lemma	56
VIII.10	Rechenregeln für nichtneg. Integranden	56
VIII.11	Positivteil und Negativteil „signierter“ Fktn	57
VIII.12	Integrierbare Fktn (I)	57
VIII.13	Absolute Integrierbarkeit	57
VIII.14	Der $\mathbb{R}$ -VR der μ -integrablen Fktn.	58
VIII.15	$\mathcal{L}_1(\mu)$ - Konvergenz	59
VIII.16	Messbarkeit von pktw. Limiten	59
VIII.17	Zwei große Limesvertauschungssätze für Lebesgue-Integrale	60
	VIII.17.1 Satz von der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (1875-1961) [1906]	60
	VIII.17.2 Satz von der majorisierten Konvergenz (von H. Lebesgue (1875-1941) [1910]	60
VIII.18	Fast überall geltende Eigenschaften	60
VIII.19	Fast überall verschwindende Fkt.n	60
VIII.20	Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral	61

IX	Die großen Regeln der Integrationstheorie	62
IX.1	Produktmaße	62
IX.2	Satz von Fubini	63
IX.3	Transformationsregel	63
IX.4	Dichtefunktionen und Kettenregel	64
IX.5	Dominiertheit	65
IX.6	Hauptsatz von Radon-Nikodym	65
IX.7	Hauptbeispiele für dominierte W-Verteilungen	66
IX.8	Substitutionsregel für λ^k -dominierte Bildmaße	67
IX.9	Randdichten	67
IX.10	Zusammenhang zwischen Randdichten und gemeinsamer Dichte bei stoch. Unabhängigkeit	68
IX.11	Faltungslemma	69
IX.12	Zusammenhang zwischen gemeinsamer Verteilung und Randverteilung bei stochastischer Unabhängigkeit	70
X	Schwaches und starkes Gesetz der großen Zahlen	71
X.1	Grundvoraussetzung	71
X.2	Erwartungswert	71
X.3	Momente und $\mathcal{L}_p$ -Räume	72
X.4	Varianz	73
X.5	Chebyshev-Ungleichung (1821-1894)	74
X.6	Kovarianzen	75
X.7	Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Korrelation	75
X.8	Hauptsatz über st. Unabhängigkeit und Unkorreliertheit	76
X.9	Addition der Varianzen bei stochastischer Unabhängigkeit	76
X.10	Schwaches Gesetz der großen Zahlen im u.i.v.-Fall	77
X.11	Beispiel: Erwarteter Gewinn - wahrsch. Gewinn	77
X.12	Stochast. Konvergenz und fast sichere Konvergenz	78
X.13	Gegenbeispiel	78
X.14	Lemma	79
X.15	Starkes GGZ mit Kolmogorov-Bed.	79
X.16	Starkes GGZ (von Kolmogorov) im u.i.v.-Fall ohne 2-te Momente	80
X.17	Bernoullis GGZ	80
XI	Charakteristische Funktionen	81
XI.0	Motivation	81
XI.1	Definition	81
XI.2	Satz (Eigenschaften der charakteristischen Funktion)	82
XI.3	Momente	82
XI.4	Konvergenz in Verteilung	83
XI.5	Zusammenhang der verschiedenen Konvergenzbegriffe	84
XI.6	Verteilungskonvergenz und Konvergenz der charakt. Funktionen	85
XII	Zentraler Grenzwertsatz	87
XII.0	Beobachtungen	87
XII.1	Zentraler Grenzwertsatz	87
XII.2	Kurvendiskussion der Normalverteilungsdichtefunktion	88
XII.3	Konvergenzgeschwindigkeit im ZGWS	88
XII.4	Bemerkungen zum ZGWS	89