

II Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

II.1 Ergebnisraum

Man nennt die Menge Ω aller möglichen, relevanten Ausgänge eines zufälligen Vorgangs (Zufallsexperiments) den „Ergebnisraum (oder: Ergebnismenge, Stichprobenraum)“. Die Elemente $\omega \in \Omega$ werden Ergebnisse genannt. Beachte:

- Nicht-zufällige Prozesse nennt man auch deterministisch.
- Bei einem Zufallsexperiment geht man davon aus, dass der Vorgang unter identischen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist.
- Die Wahl von Ω kann wegen der Auswahl von relevanten Ergebnissen je nach Modellierungsziel variieren.

Beispiele:

(i) Einmaliges Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ii) n -maliges Würfeln:

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Dabei ist $\omega_i, 1 \leq i \leq n$ die Augenzahl beim i -ten Wurf.

Oder man wählt:

$$\Omega' = \left\{ (h_1, \dots, h_6) \in \mathbb{N}_0^6 : \sum_{i=1}^6 h_i = n \right\}$$

d.h. die Ergebnisse sind die Häufigkeiten der Augenzahlen.

(iii) Anzahl der Würfelwürfe bis zum ersten Sechser: $\Omega = \mathbb{N}$.

(iv) Unendlich oft wiederholter Münzwurf: $\Omega = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i \in \{0, 1\}\}$.

(v) Anzahl Schäden in einem Bestand von 1 Mio. Versicherten. $\Omega = \mathbb{N}_0$.

(vi) Gesamte Schadenssumme in einem Bestand von 1 Mio. Versicherten. $\Omega = [0, \infty)$.

II.2 Ereignissysteme

Nicht nur die einzelnen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ sollen mit einer Wahrscheinlichkeit bewertet werden, sondern auch sogenannte Ereignisse, die aus mehreren Ergebnissen bestehen; z.B. beim einmaligen Würfeln das Ereignis $A := \{\text{gerade Augenzahl}\} = \{2, 4, 6\}$.

Dabei soll die Wahrscheinlichkeit bestimmte Eigenschaften (s.u.) erfüllen. Potentiell sind alle Teilmengen $A \subseteq \Omega$ Ereignisse. Man könnte also die Potenzmenge als Mengensystem $\mathcal{F}$ der Ereignisse verwenden, d.h.

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}\{\Omega\}.$$

Bei abzählbarem (also endlichem oder abzählbar unendlichem) Ω macht man das auch so.

Aber wenn Ω überabzählbar ist (z.B. $\mathbb{R}$), ist die Potenzmenge zu groß. Man kann i.A. nicht für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine Wahrscheinlichkeit mit den geforderten Eigenschaften definieren (siehe nächstes Kapitel).

Daher beschränkt man sich auf ein kleineres Mengensystem $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$, das aber alle (für die Anwendung relevanten) $A \subseteq \Omega$ enthält. Geeignete Mengensysteme sind sogenannte Ereignissysteme.