Repetitorium zur Stochastik (Stand: 19.9.2023)

Kapitel 1: Beschreibende Statistik

(i) Zusammenfassung

Man unterscheidet zwischen nominal, ordinal und metrisch skalierten Merkmalen. Nominal- und ordinal skalierte Merkmale entsprechen zusammengefasst den kategorialen Merkmalen.

Beschreibung der Verteilung einer Stichprobe:

- univariat
  - mit Kenngrößen:
    - für kategoriale Merkmale: absolute und relative Häufigkeitsverteilung, Modalwert
    - für ordinal skalierte Merkmale: Median, Quartile, Quantile, Ränge
    - für metrisch skalierte Merkmale: arithmetisches Mittel, Stichprobenvarianz- und Standardabweichung, mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert, mittlere absolute Abweichung vom Median, Median-Deviation, Spannweite
  - mit Grafiken:
    - für kategoriale Merkmale: Stab- oder Säulendiagramm, Kuchendiagramme (zur Kennzeichnung von Mehrheiten),
    - für metrische Merkmale: Boxplot (markiert die Quartile und Ausreißer), Histogramm (Häufigkeitsdichte über Klassen. Fläche entspricht Häufigkeit)
- bivariat
  - mit Kenngrößen:
    - für zwei kategoriale Merkmale: Kontingenztabellen, bedingte relative Häufigkeitstabelle,
    - für zwei ordinal skalierte Merkmale: Spearmans Korrelationskoeffinzient
    - für zwei metrisch skalierte Merkmale: Stichprobenkorrelationskoeffizient
- mit Grafiken
  - für zwei kategoriale Merkmale: Mosaikplot
  - für zwei metrisch skalierte Merkmale: Streudiagramm
  - für ein kategoriales und ein metrisches Merkmal: gruppierte Boxplots, gruppierte Histogramme

  Bemerkung: Die Korrelation misst den Zusammenhang, NICHT die Kausalität!

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.2: (4 Punkte) (ST01KL-DeskrStatistik01) ●●○○

Sei $x = (x_1, \ldots, x_{10})$ eine Stichprobe von zehn reellen Zahlen mit arithmetischem Mittel $\overline{x}$ und Stichproben-Varianz s^2.

(i) Zeigen Sie:

$$s^2 = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \cdot \overline{x}^2\right)$$

(ii) Nehmen Sie an, die zehn Werte $x_1, \ldots, x_{10}$ stehen in einem R-Datenvektor `x`. Geben Sie die R-Befehle zur Berechnung der linken und rechten Seite aus Teilaufgabe (i) an.

Aufgabe 7 18 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

Hinweis: Für alle Aussagen ist λ das Lebesguemaß auf der Borel-Sigmaalgebra $\mathbb{B}$.

i) Der Median der Werte 1;2;3;4 und 1000 ist kleiner als das arithmetische Mittel dieser Zahlen.

ii) Drei zufällig gebildete Gruppen des Data Science-Studiengangs werden mit jeweils unterschiedlichen Lehrmethoden in Stochastik unterrichtet. Am Ende des Semesters wird in jeder Gruppe die gleiche Klausur geschrieben. Um die Lehrmethoden bezüglich der in der Klausur erzielten Punkte vergleichen zu können, eignen sich gruppierte Boxplots.

Kapitel 2: Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

(i) Zusammenfassung

Man nennt die Menge Ω aller möglichen, relevanten Ausgänge eines zufälligen Vorgangs (Zufallsexperiments) den **Ergebnisraum** (oder: Ergebnismenge, Stichprobenraum).

Sei $\Omega \neq \emptyset$. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ein **Ereignissystem** oder eine σ**-Algebra** über Ω, falls

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$ (d.h. mit A ist auch das Komplement $A^C \in \mathcal{F}\big)$.

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$ (Vereinigungsstabilität: Vereinigungen von beliebigen Elementen aus $\mathcal{F}$, auch abzählbar unendlich viele, sind wieder in $\mathcal{F}$).

Daraus folgt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) $A \cup B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(c) $A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{F}$.

(d) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$ (Durchschnittsstabilität abzählbar vieler Mengen).

Bemerkungen:

(a) Die Teilmengen in $\mathcal{F}$ heißen **Ereignisse** oder **messbare Mengen**.

(b) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber allen abzählbaren Mengenoperationen.

(c) $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist Ereignissystem

(d) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist Ereignissystem

(e) Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist $\underbrace{\mathbb{H} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}}_{System\, der\, beschr.\, halboffenen\, Intervalle}$ kein Ereignissystem.

Sei (Ω, A) ein Ereignisraum, so heißt eine Abbildung P: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mit

(a) $\mathrm{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$. (Nichtnegativität)

(b) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. (Normiertheit)

(c) Für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P\left(A_i\right), \quad \sigma\text{-Additivität}$$

wobei $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt heißt, dass $A_1 \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$,

ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** oder eine **(Wahrscheinlichkeits)-Verteilung**.

Rechenregeln für W-Maße:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ ein W-Raum und $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ beliebige Ereignisse. Dann gilt

(a) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

(b) Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(c) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(d) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}\left(A^C\right) = 1$.

(e) σ-Subadditivität: $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i \geq 1} \mathrm{P}\left(A_i\right)$.

(f) $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Zähldichte: Für diskreter Wahrscheinlichkeitsräume, d.h. abzählbare Ergebnismengen Ω, definiert die Zähldichte $f : \Omega \to [0; 1]$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$ über

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega\in A} f(\omega) \text{ für } A \in \mathcal{P}(\Omega)$$

die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Für endliche Ergebnismengen Ω liefert die Zähldichte $f(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ die **diskrete Gleichverteilung**.

Für die Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ liefert die Zähldichte

$$f(\omega) = P(\{\omega\}) = \frac{\binom{M}{\omega} \cdot \binom{N}{n-\omega}}{\binom{M+N}{n}} \text{ für } \omega \in \Omega$$

die **hypergeometrische Verteilung** mit den Parametern M, N und n, kurz $Hyp_{M,N,n}$. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, beim Ziehen von n vielen Kugeln aus einer Urne mit M weißen und N schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen genau ω viele weiße Kugeln zu ziehen.

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.7: (18 Punkte) (ST01KL-AussagenWth02) ●●○○

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

(iii) Seien $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist

$$\frac{1}{3}\mathrm{P}_1 + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2$$

ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der endlichen Teilmengen einer Grundmenge Ω.

ii) Unter welchen Voraussetzungen an Ω ist $\mathcal{R}$ eine Sigmaalgebra?

Kapitel 3: Ereignissysteme

(i) Zusammenfassung

Klassisches Maßproblem: Es existiert keine Funktion P: $\mathcal{P}([0,1]^n) \to \mathbb{R}$, die nichtnegativ, normiert, sigmaadditiv und kongruenztreu ist.

$\sigma(\mathcal{H}) := \bigcap\{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{F}$ Ereignissystem und $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{H}\}$ heißt **das von $\mathcal{H}$ erzeugte Ereignissystem** oder das (bzgl. Inklusion) kleinste Ereignissystem (über Ω), das $\mathcal{H}$ enthält.

Speziell heißt $\mathbb{B}:=\sigma(\mathbb{H})$ das Ereignissystem der Borelmengen oder **das Borelsystem** über $\Omega=\mathbb{R}$.

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Halbringsystem**, falls

(a) $\emptyset \in \mathcal{H}$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{H}:\ \exists$n: $\exists C_1, ..., C_n \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt: $A \backslash B = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{H}: A \cap B \in \mathcal{H}$ „$\cap$-stabil“

$\mathbb{H}_k := \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_k, b_k] : a_j \leq b_j\ \forall j = 1, ..., k\}$ bildet für alle $k \in \mathbb{N}$ ein Halbringsystem.

$\mathbb{B}^k:=\sigma(\mathbb{H}_k)$ wird u.a. auch erzeugt vom System der beschr. offenen Quader, vom System der kompakten Quader, vom System der nach unten unbeschränkten halboffenen Quader, vom System der offenen Mengen, vom System der abgeschlossenen Mengen und vom System der kompakten Mengen.

$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2:=\sigma(\{A_1 \times A_2$: $A_i \in \mathcal{F}_i$; für i=1,2$\})$ heißt „Produktereignissystem“ über $\Omega_1 \times \Omega_2$

Es gilt: $\mathbb{B}^k \otimes \mathbb{B}^l=\mathbb{B}^{k+l}$

(ii) Aufgaben

Aufgabe 3 6 Punkte

Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1; 2; 3\},\{3; 4\}\}$.

i) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$ (ohne Beweis).
Hinweis: $\sigma(\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$

Kapitel 4: Vom Inhalt zum Maß

(i) Zusammenfassung

(a) μ: $\mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Inhalt**, falls:

(0) $\mathcal{H}$ Halbringsystem

(i) $\forall\ H \in \mathcal{H}$: $\mu(H) \geq 0$ „nichtnegativ“

(ii) $\mu(\emptyset)=0$ „nulltreu“

(iii) $\forall n\ \forall\ H_1,...,H_n \in \mathcal{H}$, paarweise disjunkt: $\sum_{j=1}^{n} H_j \in \mathcal{H} \Rightarrow \mu(\sum_{j=1}^{n} H_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(H_j)$ „additiv“ auf $\mathcal{H}$.

(b) $\mu : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Prämaß**, falls (0)-(ii) gilt <u>und</u>

(iv) $\forall\ H_1, H_2,... \in \mathcal{H}$, paarweise disjunkt: $\sum_{j\in\mathbb{N}} H_j \in \mathcal{H} \Rightarrow \mu(\sum_{j\in\mathbb{N}} H_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(H_j)$

„σ-additiv“ auf $\mathcal{H}$

(c) μ: $\mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **Maß**, falls $\mathcal{F}$ Ereignissystem <u>und</u> μ Prämaß.

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, falls:

- $\emptyset \in \mathcal{R}$,
- $A \backslash B \in \mathcal{R} \quad \forall A, B \in \mathcal{R}$,
- $A \cup B \in \mathcal{R} \quad \forall A, B \in \mathcal{R}$.

Stetigkeitssatz für Inhalte auf Ringen

Vor.: $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Inhalt <u>und</u> $\mathcal{R}$ Ringsystem

Beh.:

(a) μ ist Prämaß

$\Updownarrow$

(b) $\forall$ $A_1, A_2,... \in \mathcal{R}$ isoton (d.h. $A_i \subseteq A_{i+1}$): $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$

$\Downarrow$

(c) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{R}$ antiton (d.h. $A_i \supseteq A_{i+1}$): $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ <u>und</u> $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$

$\Updownarrow$

(d) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{R}$ antiton: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ <u>und</u> $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$

Fortsetzungssatz von Carathéodory:

Jedes Prämaß auf einem Halbring lässt sich zu einem Maß auf das von dem Halbring erzeugte Ereignissystem fortsetzen.

(a) Ein Inhalt μ: $\mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **sigmaendlich**, falls $\exists A_1, A_2, ... \in \mathcal{H}$: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \Omega$ <u>und</u> $\forall j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) < \infty$

(b) Ein Maß μ : $\mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$ [$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{F}$: $\mu(A) \leq \mu(\Omega) < \infty$]

(c) Ein Maß $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **normiert**, **W-Maß**, **W-Vtlg.**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Eindeutigkeitssatz:

Jedes sigmaendliche Prämaß auf einem Halbring besitzt genau eine Fortsetzung zu einem Maß auf dem von dem Halbring erzeugten Ereignissystem.

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.7: (18 Punkte) (ST01KL-AussagenWth02) ●●○○

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

(i) Gegeben sei die σ-Algebra $\mathcal{F} := \{\varnothing, \mathbb{R}, [0,1], (-\infty, 0) \cup (1, \infty)\}$.
Es gilt: Die Funktion

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \#A > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf $\mathcal{F}$.

(ii) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung P ist ein sigmaendliches Maß.

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der endlichen Teilmengen einer Grundmenge Ω.

i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ einen Ring über Ω bildet.

Aufgabe 4 — 4 Punkte

(a) Wann ist ein Inhalt $\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ „sigmaendlich“ auf $\mathbb{R}$?

(b) Geben Sie (ohne Begründung) jeweils ein Beispiel für einen Inhalt $\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ an, der ...

i. ... nicht sigmaendlich ist,

ii. ... sigmaendlich, aber nicht endlich ist,

iii. ... endlich ist.

Aufgabe 7 — 18 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

vi) Seien $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Eigenschaft:

$$\mathrm{P}_1((a,b]) = \mathrm{P}_2((a,b]) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq b.$$

Dann gilt:

$$\mathrm{P}_1(B) = \mathrm{P}_2(B) \quad \forall B \in \mathbb{B}.$$

Kapitel 5: Maße und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{B}$

(i) Zusammenfassung

Korrespondenzsatz für Maße auf $\mathbb{B}$, die auf $\mathbb{H}$ endlich bleiben

Zwischen den Maßen $\nu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, die auf $\mathbb{H}$ endlich sind und den isotonen rechtsstetigen Funktionen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(0)=0$ besteht eine bijektive Beziehung.

Die (eindeutige) Fortsetzung der Intervalllänge $\mu((a,b]) = b-a$ von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{B}$ heißt **Lebesgue-Maß** λ.

Das Lebesgue-Maß ist bewegungsinvariant (kongruenztreu), damit ist der Ausweg aus dem klassischen Maßproblem gefunden!

Zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\mathrm{P} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$$

und den isotonen rechtst. Funktionen

$$\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \lim_{a\to-\infty} \mathrm{F}(a) = 0 \text{ und } \lim_{b\to\infty} \mathrm{F}(b) = 1$$

ist

$$\mathrm{P} \mapsto \mathrm{F}_P(b) := \mathrm{P}((-\infty, b]) \ \ \forall b \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{F} \mapsto \mathrm{P}_F((a,b]) := \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \ \ \forall a \leq b$$

eine Bijektion.

Kontinuierliche Verteilungen auf $\mathbb{B}$: $\mathrm{N}_{\mu,\sigma^2}$-, χ^2_f- und $U_{a;b}$-Verteilung (Charakterisierung über Dichten in Kapitel 9)

ζ_M ist das Zählmaß auf der Grundmenge M und ist durch $\zeta_M(B) := \#M \cap B$ definiert (Anzahl der Elemente in der Schnittmenge von B und M).

(ii) Aufgaben

Aufgabe 7 — 18 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

iii) Es gilt: $\lambda(\{7\}) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie bei der Begründung bitte nur die Definition des Lebesguemaßes und die in der Vorlesung behandelten Sätze.

iv) Sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{B}$ (also das Maß, das jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente zuordnet). Dann gilt: $\zeta(B) \geq \lambda(B)$ für alle $B \in \mathbb{B}$.

Kapitel 6: Wahrscheinlichkeitsräume

(i) Zusammenfassung

Def.: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum** oder kurz „W-Raum“, falls

(a) Ω beliebige nichtleere Menge

(b) $\mathcal{F}$ Ereignissystem über Ω

(c) P W.-Verteilung auf $\mathcal{F}$

Rechenregel in Wahrscheinlichkeitsräumen

(a) $\mathrm{P}(\emptyset)=0$ und $\mathrm{P}(\Omega)=1$

(b) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B)+\mathrm{P}(A \cap B)$

(d) Ein- und Ausschlusssatz von Sylvester-Poincare (Siebformel): $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{T \in \left\{ {n \atop i} \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j \in T} A_j\right)$$

wobei $\left\{ {n \atop i} \right\} := \{T \subseteq \{1, ..., n\} : \#T = i\ \}$ „alle i-elementigen Teilmengen aus $\{1, ..., n\}$“ sind. (Beachte $\#\ \left\{ {n \atop i} \right\} = \binom{n}{i}$)

(e) $\forall A, B \in \mathcal{F}$: $A \subseteq B \Rightarrow 0 \leq \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B) \leq 1$

(f) P ist stetig von unten, stetig von oben und stetig in $\emptyset$, d.h.
$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit A_n antiton oder isoton gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\lim\limits_{n \to \infty} A_n\right)$
$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit A_n antiton und $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$

Bedingte Verteilung:

$$\mathrm{P}(.|B) : \quad \mathcal{F} \;\to\; [0, 1] \qquad A \;\mapsto\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Satz von der totalen Zerlegung

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathrm{P}(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)$$

Satz von Bayes

$$\mathrm{P}(A) > 0 \;\Rightarrow \forall\, j : \mathrm{P}(B_j|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_j)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A|B_j)}{\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}$$

Stochastische Unabhängigkeit

(a) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen **stochastisch unabhängig** im W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ falls $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

(b) Endlich viele Ereignisse $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\forall\, T \subseteq \{1, ..., n\} : \mathrm{P}(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} \mathrm{P}(A_j)$$

(c) Endlich viele Teil-Ereignissysteme $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{F}$ heißen **stoch. unabh.**, falls

$$\forall B_1 \in \mathcal{A}_1, ..., B_n \in \mathcal{A}_n : \quad B_1, ..., B_n \text{ stoch. unabh.}$$

Induzierte stoch. Unabhängigkeit: $A_1, ..., A_n$ st. un. $\Leftrightarrow$ $\sigma(A_1), ..., \sigma(A_n)$ st. un.

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.7: (18 Punkte) (ST01KL-AussagenWth02) ●●○○

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

(iv) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse mit $P(A) = 1$.
Dann gilt : A und B sind stochastisch unabhängig.

(v) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse mit $\mathrm{P}(B) > 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{P}(A|B) \geq \mathrm{P}(A \cap B).$$

Kapitel 7: Zufallsvariable und ihre Verteilung

(i) Zusammenfassung

(a) $X : \Omega \ \to E$ heißt **Zufallsvariable**, falls $\forall B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$
(Urbilder messbarer Mengen sind messbar.)

(b) $\mathrm{P}^X : \mathcal{B} \to [0, 1] \qquad B \mapsto \mathrm{P}(X^{-1}(B))$ heißt **Vtlg. der ZV** X.

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Bildmenge $B = \{0, 1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$, heißt **binomial-verteilt** mit Parameter n, p $(0 < p < 1)$, (kurz: $X \sim B_{n,p}$), falls

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ für } k \in B.$$

(Anzahl weiße Kugeln beim Ziehen von n Kugeln aus Urne mit einem relativen Anteil von p weißen Kugeln mit Zurücklegen. Erfolg/Misserfolg-Modell.)

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Bildmenge $B = \mathbb{N}$ heißt **geometrisch verteilt** mit Parameter p $(0 < p < 1)$ (kurz: $X \sim G_p$), falls

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \text{ für } k \in B = \mathbb{N}$$

(Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer, wenn Trefferwsk. $= p$.)

Standard-N-Vtlg. und χ^2-Vtlg.: X vtlt. gem. $N_{0,1} \ \Rightarrow \ X^2$ vtlt. gem. χ^2_1

Die Funktion F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad b \mapsto \mathrm{P}(X \leq b) \equiv P(X^{-1}(-\infty, b])$ heißt **Vtlgs.fkt.** (der Vtlg.) von X. Die Verteilungsfunktion bestimmt die Verteilung von X.

Die Familie X_t, t $\in T$, heißt **stoch. unabh.**, falls je endlich viele Teilereignissysteme

$$\mathcal{A}_t := \{X_t^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_t\}$$

st. unabh. sind.

Es gilt: $X, Y : \Omega \quad (\mathcal{F}, P) \to E \quad (\mathcal{B})$ st. un. ZV und $f, g : \ E \to E$ messbare Fkt.n, d.h. $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ und $g^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$,

$$\Rightarrow f \circ X, \ g \circ \mathbb{Y} \text{ sind st. unabhängig}$$

Die Vtlg. der Summe von zwei st. un., $\mathbb{R}$-wertigen ZV heißt **Faltung**.

Die Faltung von binomial-vtlt. ZV.n mit demselben Anteilswert p ist binomial-vtlt.

Die Familie $\mathrm{X}_t, t \in T$ heißt **ident. vtlt.**, falls

$$\forall s, t \in T : \mathrm{P}_s^{X_s} = \mathrm{P}_t^{X_t}$$

d.h. $(E, \mathcal{B}, \mathrm{P}_s^{X_s}) = (E, \mathcal{B}, \mathrm{P}_t^{X_t})$

Die Familie $\mathrm{X}_t, t \in T$ heißt **u.i.v.**, falls sie sowohl st. un. als auch ident. vtlt. ist.

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.3: (3 Punkte) (ST01KL-Masstheorie) ●●○○

Seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen mit Bildsigmaalgebra $\mathbb{B}$ und gleicher Verteilungsfunktion F.

(i) Warum stimmen dann auch die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen P^X und P^Y überein?

Aufgabe 11.7: (18 Punkte) (ST01KL-AussagenWth02) ●●○○

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

(vi) Es gilt:
Die Funktion

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \mathbb{1}_{[0;7]}(x)$$

ist eine Zufallsvariable bezüglich $(\mathbb{R}, \{\varnothing, \mathbb{R}\}, \mathrm{P})$ und $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Kapitel 8: Lebesgue-Integrale

(i) Zusammenfassung

(a) Eine Funktion $f : \Omega \to E$ heißt **messbar**, falls $\forall B \in \mathcal{B} : \{f \in B\} := \underbrace{f^{-1}(B)}_{[=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\in B\}]} \in \mathcal{F}$

(Urbilder messbarer Mengen sind messbar.)

(b) Für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to E$ heißt $\mu^f : \mathcal{B} \to [0, \infty) \quad B \mapsto \mu(f \in B)$ **Bildmaß**.

(a) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **elementar**, falls: $\exists n \in \mathbb{N} : \exists a_1, ..., a_n \geq 0 : \quad \exists B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}$ pw. disj.: $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$

(b) Für alle elementaren Funktionen $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$ definieren wir: $\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(B_i) \in [0, \infty]$

(a) $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F}) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ messbar}\}$ ist $\mathbb{R}$-VR, d.h. insbesondere $\forall f, g \in \mathcal{L}_0, c \in \mathbb{R} : c \cdot f \in \mathcal{L}_0, f + g \in \mathcal{L}_0$.

(b) $\forall f, g \in \mathcal{L}_0 : f \cdot g$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}_0$

Olympialemma

Für jede nichtnegative, messbare Funktion f gibt es eine isotonen Folgen elementarer Funktionen $h_1, h_2, \ldots$, die alle kleiner oder gleich f sind und gegen f konvergieren.

Egal, welche solche Folge man nimmt, für den Grenzwert der Integrale $\lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu$ kommt immer der gleiche Wert heraus. Diesen Wert definieren wir als $\int f d\mu$.

$f_+ := \max\{f, 0\}$ heißt „Positivteil (von f)“, $f_- := \max\{-f, 0\}$ heißt „Negativteil (von f)“.

(a) $f = f_+ - f_-$ <u>und</u> $|f| = f_+ + f_-$

(b) f messbar $\Leftrightarrow f_+, f_- \in \mathcal{L}_0^+$

(a) $\mathcal{L}_1(\mu) := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathcal{L}_0 : \int f_+ d\mu < \infty \text{ und } \int f_- d\mu < \infty\}$ = Menge der „μ-integrierbaren“ Fktn.

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_1(\mu) : \int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \mathbb{R}$

(a) $\forall f \in \mathcal{L}_0 : \ f \in \mathcal{L}_1(\mu) \Leftrightarrow \int |f| d\mu < \infty$

(b) $\mathcal{L}_1(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0 : \int |f| d\mu < \infty\}$

(a) $\mathcal{L}_1(\mu)$ ist $\mathbb{R}$-VR

(b) $I : \mathcal{L}_1(\mu) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto \int f d\mu$ ist monoton und $\mathbb{R}$-linear (Letzteres heißt: $\forall c \in \mathbb{R}\ \forall f \in \mathcal{L}_1 : \ \int cf = c \int f$

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_1 : \ \int f + g = \int f + \int g)$$

(c) $\forall f \in \mathcal{L}_1(\mu) : |I(f)| \leq I(|f|)$, d.h. $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$

Satz von der monotonen Konvergenz (von Levi)

$$\forall f_1, f_2, ... \in \mathcal{L}_0^+ \text{ isoton} : f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ exist. und } \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in [0, \infty]$$

Satz von der majorisierten Konvergenz (von Lebesgue)

$\forall f_1, f_2, ... \in \mathcal{L}_0 :$ Wenn $(\exists g \in \mathcal{L}_1(\mu) : \ \forall n \geq 1 : |f_n| \leq g)$ und $f_n \overset{pktw.}{\underset{n\to\infty}{\to}} f$, dann: $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}$ usw.

$f_n \overset{\mu \text{ f.ü.}}{\underset{n\to\infty}{\to}} g$: $\Leftrightarrow \mu(\liminf_{n\to\infty} f_n < \limsup_{n\to\infty} f_n) = \mu(\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \neq g) = 0$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar bzgl. $\mathbb{B} - \mathbb{B}$ und über dem Intervall $[a; b] \subsetneq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist $f \cdot \mathbb{1}_{[a;b]}$ Lebesgue- integrierbar und es gilt:

$$\int_{[a;b]} f d\lambda := \int \mathbb{1}_{[a;b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.4: (9 Punkte)

(ST01KL-Messbarkeit) ●●●○

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Messraum, d.h. $\mathcal{F}$ ist ein Ereignissystem auf Ω, und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) Beweisen Sie:

f messbar bzgl. $\mathcal{F}$ und $\mathbb{B}$ $\Leftrightarrow \forall\, H\in\mathbb{H}: f^{-1}(H)\in\mathcal{F}$

Hinweis: Warum ist die Hinrichtung klar?
Für die Rückrichtung definiert man sich das Mengensystem:

$$\mathcal{G} := \{G\subseteq\mathbb{R}:\ f^{-1}(G)\in\mathcal{F}\}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Mengensystem eine σ-Algebra bildet. Warum beweist dies die Rückrichtung? Verwenden Sie, dass für die Urbildabbildung f^{-1} und beliebige Mengen $A,B,A_1,A_2,\ldots$ gilt:

$$f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i).$$

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist $\mathcal{F}-\mathbb{B}$-messbar.

(b) $\{f>a\}\in\mathcal{F} \qquad \forall a\in\mathbb{R}$.

(c) $\{f\le a\}\in\mathcal{F} \qquad \forall a\in\mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Aufgabe 11.5: (12 Punkte, davon 8 Punkte für Teil (v))

(ST01KL-Integrale03) ●●●●

Berechnen Sie folgende Integrale bzw. Erwartungswerte:

(i) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\pi}\sin(\frac{x}{4})d\delta_{\{\pi\}}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\left(e^{-(x^2)} + 3\cos^2(7x)\right) dN_{0,1}$,

Aufgabe 3

6 Punkte

Sei $\Omega=\{1;2;3;4\}$ und $\mathcal{E}=\{\{1;2;3\},\{3;4\}\}$. Sind folgende Funktionen $f:(\Omega,\sigma(\mathcal{E}))\to(\mathbb{R},\mathbb{B})$ messbar?

ii) $f(\omega)=1 \quad \forall\omega\in\Omega$

iii) $f(\omega)=\omega \quad \forall\omega\in\Omega$

iv) $f(\omega)=(\omega-3)^2 \quad \forall\omega\in\Omega$

v) $f(\omega)=\min(|\omega-3|,1) \quad \forall\omega\in\Omega$

Aufgabe 5

7 Punkte

Berechnen Sie folgende Erwartungswerte bzw. Integrale:

iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\left(\sin(3x)+\cos(7x+2)\right) dN_{0,1}$.

iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5^k}{k!} d\zeta_{\mathbb{N}_0}(k)$,

Aufgabe 7

18 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

v) Sei $f_n:\mathbb{R}\to\{0,1\}$; $\quad f_n=\mathbb{1}_{\{1,\ldots,n\}}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt: $f_n\to 1 \quad \lambda$-fast überall.

Kapitel 9: Die großen Regeln der Integrationstheorie

(i) Zusammenfassung

Sei $\mathcal{H}$ das Halbringsystem der Rechtecke mit messbaren Seiten. Die eindeutige Fortsetzung des sigmaendlichen Prämaßes $\lambda : \mathcal{H} \to [0, \infty] \quad B \times C \mapsto \mu(B) \cdot \nu(C)$ auf $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ heißt das **Produktmaß**

$$\mu \otimes \nu \ : \ \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \to [0, \infty]$$

Es ist ebenfalls sigmaendlich.

Satz von Fubini $\forall f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar: f nichtnegativ oder f $\mu \otimes \nu$ -integrabel

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x,y)\ d\mu \otimes \nu(x,y) = \int\limits_{\mathcal{Y}} \left(\int\limits_{\mathcal{X}} f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_{\mathcal{X}} \left(\int\limits_{\mathcal{Y}} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Transformationsregel

$\forall f \in \mathcal{L}_0(\mathcal{X}, \mathcal{B})$: $f \in \mathcal{L}_1(\mu^T) \Leftrightarrow f \circ T \in \mathcal{L}_1(\mu) \Rightarrow \int\limits_{\mathcal{X}} f d\mu^T = \int\limits_{\Omega} f \circ T d\mu$

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt μ-Dichte(-funktion) von ν, wenn: $f \geq 0$ und $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

Kettenregel

$\forall g \in \mathcal{L}_0 : g \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \Leftrightarrow \quad g \cdot f \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \Rightarrow \quad \int g d\nu = \int g f d\mu$

Hauptsatz von Radon-Nikodym

Wenn μ sigmaendlich ist und ν dominiert, dann existiert eine μ-Dichte von ν; in Zeichen:

$$\forall \mu \text{ sigmaendl. Maß} : \ \forall\ \nu \text{ Maß} \qquad \nu \ll \mu \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}_0^+ : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu$$

Wichtige λ-Dichten:

(a) Normal-Vtlg. $\quad N_{\mu,\sigma^2} : f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\sigma^2 > 0)$

(b) Exponentialverteilung $Exp_\lambda = \lambda : f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;\infty)}(x) \quad (\lambda > 0)$

(c) kontinuierliche Gleichverteilung $U_{(a;b)} : f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a;b)}(x)$

Wichtige $\zeta_{\mathbb{N}_0}$-Dichten:

(a) Hypergeom.-Vtlg: siehe oben bei Kapitel 2

(b) Binomial-Vtlg: siehe oben bei Kapitel 7

(c) Poisson-Vtlg $P_\lambda : p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k \in N_0)$

(d) Geometrische Verteilung: siehe oben bei Kapitel 7

Substitutionsregel für λ^k-dominierte Bildmaße μ hat λ^k-Dichte f und T Bijektion mit differenzierbarer Umkehrabbildung T^{-1}

$$\Rightarrow \quad \mu^T \text{ hat } \lambda^k\text{-Dichte } g := f \circ T^{-1} \cdot |\det DT^{-1}|$$

Randdichten Sei $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ eine $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-wertige Zufallsvariable, deren Verteilung eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-Dichte $f(x,y)$ besitzt. Dann gilt:

$$g(x) := \int\limits_{\mathcal{Y}} f(x,y) d\mu_2(y) \text{ ist eine } \mu_1\text{-Dichte von } \mathrm{P}^X$$

$$h(y) := \int\limits_{\mathcal{X}} f(x,y) d\mu_1(x) \text{ ist eine } \mu_2\text{-Dichte von } \mathrm{P}^Y$$

Zshg. zw. Randdichten und gem. Dichte bei stoch. Unabh.

X, Y stochastisch unabhängig $\Leftrightarrow \ f(x,y) = g(x)h(y) \qquad \mu_1 \otimes \mu_2$ -f.ü.

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.3: (3 Punkte)

(ST01KL-Masstheorie) ●●○○

Seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen mit Bildsigmaalgebra $\mathbb{B}$ und gleicher Verteilungsfunktion F.

(ii) Neben der Verteilungsfunktion gibt es noch weitere Möglichkeiten, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Borelsigmaalgebra zu beschreiben, ohne die Verteilung auf ganz $\mathbb{B}$ anzugeben. Nennen Sie eine weitere Möglichkeit.

Aufgabe 11.5: (12 Punkte, davon 8 Punkte für Teil (v))

(ST01KL-Integrale03) ●●●●

Berechnen Sie folgende Integrale bzw. Erwartungswerte:

(ii) $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)^2 \, d(x,y)$,

(v) $\int\limits_1^2 1 \, dP^{\frac{X}{Y}}$, wobei X,Y stochastisch unabhängig und identisch Exp_1 verteilt sind.

Zusatzfrage zu (v):
Geben Sie eine R-Befehlskombination an, die 100000 Realisierungen von X und Y generiert und zählt, in wie vielen dieser Realisierungen X/Y zwischen 1 und 2 liegt.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung des Integrals die Substitutionsregel mit der Transformation:

$$T : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty); \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{y} \\ y \end{pmatrix}$$

und Umkehrabbildung

$$T^{-1} : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty) \times (0,\infty); \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.6: (5 Punkte)

(ST01KL-WskBerechnen) ●●●○

Sei $X \sim U_{(a;b)}$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeit

(i) $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$,

---

wobei $\mu := \mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Hinweise:

- *Wenn Sie die Wahrscheinlichkeitnicht allgemein für beliebige $a < b$ berechnen können, berechnen Sie bitte die beiden Wahrscheinlichkeiten für den Spezialfall $a = 0$ und $b = 1$, also $X \sim U_{(0;1)}$.*
- *Die Teilaufgabe (ii) kann unabhängig von (i) gelöst werden.*

Sei nun X eine beliebige reelle Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und endlicher positiver Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$.

(ii) Geben Sie eine Verteilung P^X an, die $\mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 5

7 Punkte

Berechnen Sie folgende Erwartungswerte bzw. Integrale:

ii) $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 4\}} + y^2 \mathbb{1}_{[0;1]^2}(x,y) d(x,y)$,

v) $\int\limits_{[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\, d(x,y)$,

Aufgabe 6 9 Punkte

Sei $X \sim Exp_6$.

i) Geben Sie die Lebesguedichte der Zufallsvariable $Y := 3X + \ln(6)$ an.

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit:

$$\mathrm{P}(Y > \ln(12))$$

Hinweis: Wenn Sie die Dichte in Teilaufgabe i) nicht berechnen konnten, rechnen Sie bitte mit der (falschen) Dichte: $g(y) = 3e^{-3y+3\ln(6)}\mathbb{1}_{[\ln(6),\infty)}(y)$ *weiter.*

iii) Berechnen Sie folgenden Erwartungswert:

$$\mathrm{E}\left[Y\mathbb{1}_{[3,\infty)}(Y)\right]$$

iv) Geben Sie eine R-Befehlskombination an, die 100 000 Realisierungen von Y generiert und zählt, in wie vielen dieser Realisierungen Y größer als ln(12) ist.

Kapitel 10: Schwaches und starkes Gesetz der großen Zahlen

(i) Zusammenfassung

$$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathrm{P} \quad \in \mathbb{R} \overset{\text{Traforegel}}{=} \int_{\mathbb{R}} x d\mathrm{P}^X \quad = \quad \mathrm{E}[\mathrm{P}^X]$$

$\mathrm{E}[N_{\mu,\sigma^2}] = \mu \quad \mathrm{E}[X_f^2] = f \quad \mathrm{E}[Exp_\lambda] = \frac{1}{\lambda} \quad \mathrm{E}[U_{(a,b)}] = \frac{a+b}{2} \quad \mathrm{E}[H_{M,N,n}] = n \cdot \frac{M}{M+N} \quad \mathrm{E}[B_{n,p}] = n \cdot p \quad \mathrm{E}[P_\lambda] = \lambda$

$\mathrm{E}[X^k]$: k-tes Moment von X

X hat endl. Moment der Ordnung $k \Rightarrow \forall j = 1, ..., , k$: X hat endl. Moment der Ordnung j.

$\mathrm{Var}_{\mathrm{P}}[X] := \mathrm{E}_{\mathrm{P}}[(X-\mu)^2] \in [0, \infty]$

$\mathrm{Var}[N_{\mu,\sigma^2}] = \sigma^2 \quad \mathrm{Var}[Exp_\lambda] = \frac{1}{\lambda^2} \quad \mathrm{Var}[U_{(0,1)}] = \frac{1}{12} \quad \mathrm{Var}[B_{n,p}] = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p - n \cdot p^2 \quad \mathrm{Var}[P_\lambda] = \lambda$

(ii) Aufgaben

Aufgabe 11.5: (12 Punkte, davon 8 Punkte für Teil (v)) (ST01KL-Integrale03) ●●●●

Berechnen Sie folgende Integrale bzw. Erwartungswerte:

(iv) $\mathrm{E}[X^q]$, wobei $X \sim B_{1,p}$, $p \in (0;1)$ und $q \in (0,\infty)$,

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende Erwartungswerte bzw. Integrale:

i) $\mathrm{E}[\ln X]$, wobei $X \sim U_{[2;4]}$,
Hinweis: Verwenden Sie den hinterlistigen 1er-Trick und die partielle Integration.

vi) $\mathrm{E}\left[\frac{2X}{1+X^2}\right]$, wobei $X \sim U_{[0;2]}$.