

Aufgabe 8.4: Formel von Bayes (4 Punkte)



In der Augsburger Straßenbahn sind 10% der Fahrgäste Schwarzfahrer. 70% der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen Schwarzfahrer gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgästen haben 5% ihre Fahrkarte vergessen. In der Aufgabe soll nun mit zwei verschiedenen Methoden die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer ist, berechnet werden.

- Lösen Sie die Aufgabe „sauber“ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum?
- Lösen Sie die Aufgabe - wie vom Psychologen Gigerenzer vorgeschlagen - mit einer Vierfeldertafel und absoluten Zahlen.

Hinweis: Stellen Sie sich dazu 1000 Fahrgäste vor und überlegen Sie, wie viele Schwarzfahrer mit bzw. ohne Fahrkarte es gibt und wie viele ehrliche Kunden mit bzw. ohne Fahrkarte. Setzen Sie die geeigneten Zahlen ins Verhältnis, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Am übersichtlichsten geht das in einer Vierfeldertafel.

- Wann stößt die Methode von Herrn Gigerenzer an ihre Grenzen?

W.-R.: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

(i) 10% Schwarzfahrer: $P(S) = 0,1$; nicht Schwarz $P(\bar{S}) = 0,9 = 90\%$

70% der Schwarzfahrer keine Karte: $P(\bar{K} | S) = 0,7$

5% nicht schwarz und keine Karte: $P(\bar{K} | \bar{S}) = 0,05$

ges: keine Karte und Schwarzfahrer: $P(S | \bar{K})$

Bayes-Formel: $P(S | \bar{K}) = \frac{P(\bar{K} | S) \cdot P(S)}{P(\bar{K})}$

$$\begin{aligned} & \text{wobei: } P(\bar{K}) = \underbrace{P(\bar{K} | S) \cdot P(S)}_{\text{Gesamtw.}} + \underbrace{P(\bar{K} | \bar{S}) \cdot P(\bar{S})}_{\text{nach Multipl. Satz}} \\ & = 0,7 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,9 = 0,07 + 0,045 = 0,115 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(S | \bar{K}) = \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,115} = \frac{0,07}{0,115} = 0,6087 = 60,87\%$$

A: Mit 60,87% ist eine Person ohne Fahrkarte ein Schwarzfahrer.

(ii) $n=1000$ mit Tabelle:

Größen: $(\bar{K} | S) = 70\%$, $(K | S) = 30\%$, $(\bar{K} | \bar{S}) = 5\%$, $(K | \bar{S}) = 95\%$

von oben wissen wir: $P(\bar{K}) = 0,115 = 11,5\% \Rightarrow 1000 \cdot 0,115 = 115$

	S	$\bar{S}$	Gesamt
$\bar{K}$	70	45	115
K	30	855	885
Ges	100	900	1000

$$\Rightarrow P(\bar{K} | S) = \frac{70}{115} = 0,6087 = 60,87\%$$

NR: $\cdot P(S | \bar{K}) = 60,87\% \Rightarrow 115 \cdot 0,6087 = 70,0005 \approx 70$
 $\Rightarrow P(S | \bar{K}) = 115 - 70 = 45$
 $\cdot \text{Ges. } K := 1000 - 115 = 885$
 $\cdot \text{da } 10\% \text{ Schwarzfahrer: } 100 \Rightarrow P(S | K) = 100 - 30 = 70$
 $\Rightarrow P(S | K) = 885 - 70 = 815$

(iii). Wahrscheinlich hat die Methode Grenzen, wenn komplexere Vorgänge vorkommen. Also die Zahlen bzw. Wahrscheinlichkeiten nicht mehr überschaubar werden.

Bei sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten oder vielen bedingten Wahrscheinlichkeiten ungenau, oder aufwendig.

Es wird schwierig, wenn Kommazahlen vorkommen z.B. 4,5 Fahrgäste.