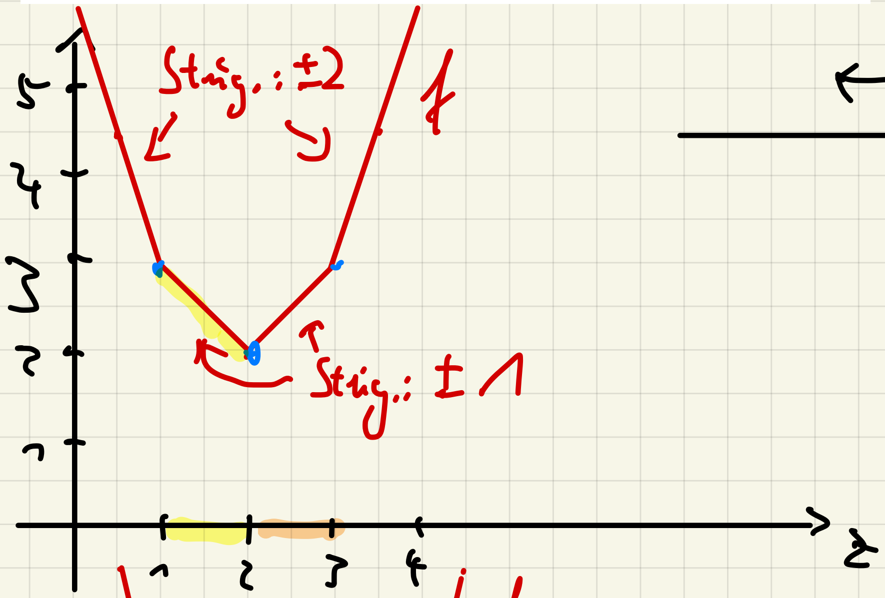
zu 4.5: (ii) zu zeigen:

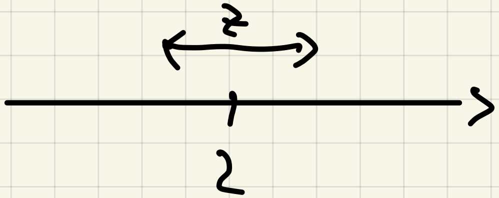
(ii) $x_{0,5} \in \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - z|$

Vorüberlegungen:

$\boxed{n = 3}$ Bsp.: $x = (1, 2, 3)$

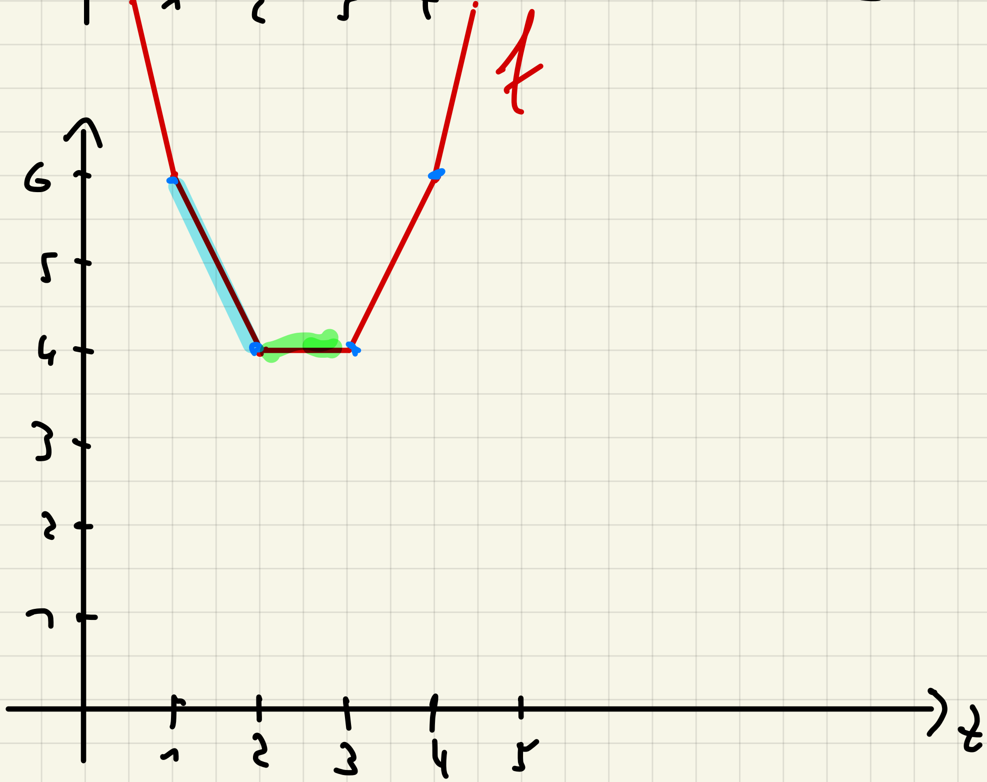
$$f(z) := \sum_{i=1}^{3} |x_i - z|$$
$$= |1 - z| + |2 - z| + |3 - z|$$





$\boxed{n=4}$ Bsp.: $x = (1, 2, 3, 4)$

$$f(z) = |1-z| + |2-z| + |3-z| + |4-z|$$



Bew.: Setze $f(z) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - z|$

Sei nun m eine reelle Zahl zw. den k-kleinsten und $(k+1)$-kleinsten Wert der Stichprobe, also $m \in [x_{\uparrow k}, x_{\uparrow k+1}]$

Dann gilt: $f(m) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - m| = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (m - x_{\uparrow i})}_{k \cdot m} + \sum_{i=k+1}^{n} (x_{\uparrow i} - m)$

$$= \underbrace{(2k-n)}_{\text{Steigung}} m - \sum_{i=1}^{k} x_{\uparrow i} + \sum_{i=k+1}^{n} x_{\uparrow i}$$

$-(n-k) \cdot m = (k-n) \cdot m$

D.h. im Intervall $[x_{\uparrow k}, x_{\uparrow k+1}]$ ist f eine lin. Fkt. mit Steigung $(2k-n)$. Solange die Steig. neg. ist, fällt f, ist sie pos. steigt f. Ist die Steig. 0, ist die Fkt. in dem Intervall konst. Ferner ist f stetig.

Für ungerade $n = 2r - 1$ (im Bsp.: $n = 3 \Rightarrow r = 2$)

ist $2k - n = 2k + 1 - 2r \leq -1 < 0$ für $k \leq r - 1$

$(r-1)$

$2r - 2 + 1 - 2r = -1$

sowie $2k + 1 - 2r \geq 1 > 0$ für alle $k \geq r$.

Damit nimmt f ihr Minimum genau am Ende des Intervalls $[x_{\uparrow(r-1)}, x_{\uparrow r}]$ an, also bei $x_{\uparrow r}$.

Für gerade $n = 2r$ (im Bsp.: $n = 4 \Rightarrow r = 2$) gilt:

$2k - n = 2k - 2r \leq -2 < 0$ für $k \leq r - 1$

und $2k - 2r \geq 2 > 0$ für $k \geq r + 1$

Für $k = r$ ist die Steigung 0, damit ist f in $[x_{\uparrow r}, x_{\uparrow r+1}]$ konstant, d.h. alle Pkte des Intervalls sind globale Minimalstellen.

#