Aufgabenblatt 13

Fach: Stochastik (Probeklausur)
Dozent: Wolfgang Bischof
Semester: Sommersemester 2024
Datum: 14.06.2024

Aufgabe 13.1: (5 Punkte)

(ST01KL-DeskrStatistik03)

Betrachten Sie den Datenvektor:

$$x = (2, 1, 5, 2, 5, 2, 0, 2)$$

Bezeichne F_7 die empirische Verteilungfunktion und F_7^{-1} die empirische Quantilfunktion. Berechnen Sie:

(i) das arithmetisches Mittel $\bar{x}$,

(ii) den Median $x_{1/2}$,

(iii) den oder die Modalwert(e) x_{mod},

(iv) das dritte Quartil von x,

(v) $F_7(6)$,

(vi) $F_7^{-1}(0.25)$ und

(vii) das 25%-Quantilintervall von x

Aufgabe 13.2: (4 Punkte)

(ST01KL-DeskrStatistik01)

Sei $x = (x_1, \ldots, x_{10})$ eine Stichprobe von zehn reellen Zahlen mit arithmetischem Mittel $\overline{x}$ und Stichproben-Varianz s^2.

(i) Zeigen Sie:

$$s^2 = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \cdot \overline{x}^2\right)$$

(ii) Nehmen Sie an, die zehn Werte $x_1, \ldots, x_{10}$ stehen in einem R-Datenvektor `x`. Geben Sie die R-Befehle zur Berechnung der linken und rechten Seite aus Teilaufgabe (i) an.

Aufgabe 13.3: (9 Punkte) (STO1KL-Messbarkeit)

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Messraum, d.h. $\mathcal{F}$ ist ein Ereignissystem auf Ω, und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) Beweisen Sie:

$$f \text{ messbar bzgl. } \mathcal{F} \text{ und } \mathbb{B} \quad \Leftrightarrow \forall\, H\in\mathbb{H} : f^{-1}(H)\in\mathcal{F}$$

Hinweis: Warum ist die Hinrichtung klar?
Für die Rückrichtung definiert man sich das Mengensystem:

$$\mathcal{G} := \{G\subseteq\mathbb{R} :\ f^{-1}(G)\in\mathcal{F}\}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Mengensystem eine σ-Algebra bildet. Warum beweist dies die Rückrichtung?
Verwenden Sie, dass für die Urbildabbildung f^{-1} und beliebige Mengen $A,B,A_1,A_2,\ldots$ gilt:

$$f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(A_i).$$

(ii) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist $\mathcal{F}-\mathbb{B}$-messbar.

(b) $\{f>a\}\in\mathcal{F} \qquad \forall a\in\mathbb{R}$.

(c) $\{f\leq a\}\in\mathcal{F} \qquad \forall a\in\mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

Aufgabe 13.4: (9 Punkte, davon 5 Punkte für Teil (v)) (ST01KL-Integrale04)

Berechnen Sie folgende Integrale bzw. Erwartungswerte:

(i) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\pi} \sin(\frac{x}{4}) d\delta_{\{\pi\}}$,

(ii) $\int_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)^2 \, d(x,y)$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\left(e^{-(x^2)} + 3\cos^2(7x)\right) \, dN_{0,1}$,

(iv) $\mathrm{E}[X^q]$, wobei $X \sim B_{1,p}$, $p \in (0;1)$ und $q \in (0,\infty)$,

(v) $\int_1^\infty x \, dP^X$, wobei X Exp_1 verteilt ist.

Zusatzfrage zu (v):
Geben Sie eine R-Befehlskombination an, die 100000 Realisierungen von X generiert und simulieren Sie damit den Wert des Integrals.

Aufgabe 13.5: (5 Punkte) (ST01KL-WskBerechnen)

Sei $X \sim U_{(a;b)}$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeit

(i) $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$,

wobei $\mu := \mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Hinweise:

- *Wenn Sie die Wahrscheinlichkeitnicht allgemein für beliebige $a < b$ berechnen können, berechnen Sie bitte die beiden Wahrscheinlichkeiten für den Spezialfall $a = 0$ und $b = 1$, also $X \sim U_{(0;1)}$.*
- *Die Teilaufgabe (ii) kann unabhängig von (i) gelöst werden.*

Sei nun X eine beliebige reelle Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und endlicher positiver Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$.

(ii) Geben Sie eine Verteilung P^X an, die $\mathrm{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 13.6: (6 Punkte)

(ST01KL-SituationModell)

Geben Sie für die folgenden Beispiele an, wie die Zufallsvariable X verteilt ist und wie die gesuchte Größe mit R berechnet werden kann.

(i) Sei X die Lebensdauer eines Transistors. Die erwartete Lebensdauer betrage 4 Jahre. Um den Preis für eine Garantie berechnen zu können, wollen Sie die Zeit t ermitteln, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer kleiner als t ist, 2% beträgt.

(ii) 500 Menschen haben einen bestimmten Flug gebucht. Sei X die Anzahl der Menschen, die tatsächlich für diesen Flug einchecken. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand, der gebucht hat, auch wirklich eincheckt, sei 60%. Wie viele Sitze sollte das Flugzeug bereitstellen, damit die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 0,5% beträgt? (Eine Überbuchung liegt vor, wenn mehr Menschen einchecken, als Sitze vorhanden sind.)

Aufgabe 13.7: (18 Punkte)

(ST01KL-AussagenWth02)

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten! Eine richtige Antwort wird mit einem Punkt belohnt, eine richtige Antwort mit korrekter Begründung mit drei Punkten.

(i) Gegeben sei die σ-Algebra $\mathcal{F} := \{\varnothing, \mathbb{R}, [0{,}1], (-\infty, 0) \cup (1, \infty)\}$.
Es gilt: Die Funktion

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \#A > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf $\mathcal{F}$.

(ii) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung P ist ein sigmaendliches Maß.

(iii) Seien $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann ist

$$\frac{1}{3}\mathrm{P}_1 + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2$$

ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

(iv) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse mit $P(A) = 1$.
Dann gilt : A und B sind stochastisch unabhängig.

(v) Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse mit $\mathrm{P}(B) > 0$. Dann gilt:

$$\mathrm{P}(A|B) \geq \mathrm{P}(A \cap B).$$

(vi) Es gilt:
Die Funktion

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \mathbb{1}_{[0;7]}(x)$$

ist eine Zufallsvariable bezüglich $(\mathbb{R}, \{\varnothing, \mathbb{R}\}, \mathrm{P})$ und $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.