Aufgabe 5.7: Siebformel (keine Punkte)

Beweisen Sie den Ein- und Ausschlusssatz von Sylvester-Poincare (Siebformel):

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A_1,\dots,A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right)$$

wobei $\left\{ n \atop i \right\} := \{T \subseteq \{1,\dots,n\} : \#T = i\ \}$ „alle i-elementigen Teilmengen aus $\{1,\dots,n\}$“ sind.
(Beachte $\#\ \left\{ n \atop i \right\} = \binom{n}{i}$)

Hinweis: Folgern Sie die Aussage aus Satz II.3.2 mithilfe der vollständigen Induktion.

Lösung: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n, wobei der Fall $n = 1$ trivial ist und der Fall $n = 2$ gerade Satz II.3.2 (iii) entspricht.
Der Induktionsschluss von n auf $n + 1$ ergibt sich wie folgt: Zunächst liefert Satz II.3.2 (iii):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)
\end{aligned}$$

Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})$ ergibt:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap A_{n+1}\right)$$

Mit einer Indexverschiebung in der Summe $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum\limits_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{j\in T} A_j \cap A_{n+1}\right)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_{n+1}) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} \left(\sum_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) + \sum_{T\in\left\{ n \atop i-1 \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap A_{n+1}\right)\right) \\
&\quad + (-1)^n \sum_{T\in\left\{ n \atop n \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap A_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{T\in\left\{ n \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right) + \sum_{T\in\left\{ n \atop i-1 \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap A_{n+1}\right) = \sum_{T\in\left\{ n+1 \atop i \right\}} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in T} A_j\right)$$

für $2 \le i \le n$ (Aufspaltung danach, ob $n + 1$ in der i-elementigen Teilmenge T von $\{1,\dots,n + 1\}$ auftritt oder nicht!) folgt die Behauptung. #