

VI.8 Induzierte stoch. Unabhängigkeit

Voraussetzung:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W.-Raum; $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$; $\sigma(A_j) := \{\emptyset, A_j, A_j^C, \Omega\}$

Behauptung:

$A_1, \dots, A_n$ st. un. $\Leftrightarrow \sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)$ st. un.

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ : klar nach Def. VI.7 (iii)

„ $\Rightarrow$ “ : (nur für $n = 2$)

Seien $B_1 \in \sigma(A_1)$, $B_2 \in \sigma(A_2)$:

Falls $B_1 \in \{\emptyset, \Omega\}$ oder $B_2 \in \{\emptyset, \Omega\}$ trivial

Restliche Fälle:

$B_1 = A_1$ und $B_2 = A_2$: wg. Vor.

$$\begin{aligned} B_1 = A_1 \text{ und } B_2 = A_2^C : & P(A_1 \cap A_2^C) = P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ & = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\ & = P(A_1) - P(A_1)P(A_2) \\ & = P(A_1)((1 - P(A_2))) \\ & = P(A_1)P(A_2^C) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die stochastische Unabhängigkeit erhalten bleibt, wenn man in einer Menge zum Komplement übergeht.

Somit folgt: A_1, A_2 st. un. $\Leftrightarrow A_1^C, A_2$ st. un. $\Leftrightarrow A_1^C, A_2^C$ st. un.

#

VI.9 Übergang zum Komplement

(i) $A_1, \dots, A_n$ st. un. $\Leftrightarrow A_1^C, \dots, A_n^C$ st. un. (Begründung: Satz VI.8)

(ii)

$$A_1, \dots, A_n \text{ st. un.} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod P(A_i^C)$$

(Begründung: $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\bigcap A_i^C)$)

Alternative: Berechnung von $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ mit Ein- und Ausschlusssatz VI.2d.

VI.10 Beispiel

Ein Indianerhäuptling will einem Fremdling noch eine letzte Chance geben, bevor er ihn an den Marterpfahl kettet. Dazu gibt er ihm 50 weiße Kugeln, 50 schwarze Kugeln und zwei Urnen. Er spricht: Verteile die Kugeln, wie Du willst auf die zwei Urnen. Anschließend verbinde ich dir die Augen und du darfst zunächst eine Urne und dann eine Kugel ziehen. Ist sie weiß kommst du frei, andernfalls an den Pfahl.

Wie sollte der Fremdling die Kugeln verteilen?

Lösung:

Sei $\Omega = \{1, 2\} \times \{s, w\}$

Aufgabe: Maximiere $P(A)$ mit $A = \{1, 2\} \times \{w\}$

Es gilt: $P(B_1) = \frac{1}{2}$ mit $B_1 = \{1\} \times \{w, s\}$ (Urne 1)

$P(B_2) = \frac{1}{2}$ mit $B_2 = \{2\} \times \{w, s\} = B_1^C$

$P(A|B_1) = \frac{\# \text{wei\ss e Kugeln in 1}}{\# \text{Kugeln in 1}} =: \frac{w_1}{u_1}$

$P(A|B_2) = \frac{50-w_1}{100-u_1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{w_1}{u_1} + \frac{50-w_1}{100-u_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{100w_1 - w_1u_1 + 50u_1 - w_1u_1}{u_1(100-u_1)} = \frac{50w_1 + 25u_1 - w_1u_1}{u_1(100-u_1)} \end{aligned}$$

o.B.d.A sei $u_1 \leq 50$. Dann nimmt $P(A)$ sein Maximum in $w_1 = u_1$ an, denn:

$$\frac{\partial}{\partial w_1} P(A) = \frac{1}{u_1(100-u_1)} (50-u_1) \geq 0$$

Wähle also $w_1 := u_1 \Rightarrow P(A) = \frac{75u_1 - u_1^2}{u_1(100-u_1)} = \frac{75-u_1}{100-u_1}$

$P(A)$ ist maximal für $u_1 = 1$, denn:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} P(A) = \frac{-(100-u_1) - (75-u_1)(-1)}{(100-u_1)^2} = \frac{u_1 - 100 + 75 - u_1}{(100-u_1)^2} = \frac{-25}{(100-u_1)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ Wähle $u_1 = w_1 = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{74}{99} = 0, \overline{74}$

ANKI
6;
MOOD-
LE 6