Übungen zur Deskr. Statistik und Stochastik

Wolfgang Bischof

Sommersemester 2024

Technische Hochschule Augsburg
Data Science

11. Juni 2025

Klassifikation der Aufgaben:

- ●○○○ leichte Aufgaben
- ●●○○ mittelschwere Aufgaben
- ●●●○ schwere Aufgaben
- ●●●● Aufgaben zur weiteren Vertiefung

Aufgabe 10.1: Messbarkeit (5 Punkte) (STO-Messbarkeit01 | 3)

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Messraum, d.h. $\mathcal{F}$ ist ein Ereignissystem auf Ω, und $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) f ist $\mathcal{F} - \bar{\mathbb{B}}$-messbar.

(ii) $\{f > a\} \in \mathcal{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

(iii) $\{f \geq a\} \in \mathcal{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

(iv) $\{f < a\} \in \mathcal{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

(v) $\{f \leq a\} \in \mathcal{F} \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

Zeigen Sie ferner für den Spezialfall $\mathcal{F} = \sigma(\{\Omega\})$: (i) $\Leftrightarrow f \equiv a$ für ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass

$$\bar{\mathbb{B}} := \{B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\} \mid B \in \mathbb{B}\}$$

eine σ-Algebra ist, die vom Mengensystem $\mathcal{D} := \{[-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$ erzeugt wird.
Zeigen Sie zunächst (i) $\Leftrightarrow$ (v), in dem Sie Lemma A aus Kapitel VIII.7 verwenden. Zeigen Sie anschließend den Ringschluss: (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (ii).

Lösung:

(i) $\Leftrightarrow$ (v): „$\Rightarrow$“: klar, da $[-\infty, a] \in \bar{\mathbb{B}}$
und $\{f \leq a\} = \{\omega \mid f(\omega) \in [-\infty, a]\} = f^{-1}([-\infty, a])$

„$\Leftarrow$“: Da $\mathcal{D} := \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ nach Angabe ein Erzeuger von $\bar{\mathbb{B}}$
ist, folgt die Beh. nach Lemma A in VI.7 (1)

zeige nun: (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\{f \geq a\} = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{f > a - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathcal{F} \text{ wg. (ii)}}}_{\in \mathcal{F}}$ (1/2)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : $\{f < a\} = \underbrace{\underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{F} \text{ wg. (iii)}}^{C}}_{\in \mathcal{F}}$ (1/2)

(iv) $\Rightarrow$ (v) : $\{f \leq a\} = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{f < a + \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathcal{F} \text{ wg. (iv)}}}_{\in \mathcal{F}}$ (1/2)

(v) $\Rightarrow$ (ii) : $\{f > a\} = \underbrace{\underbrace{\{f \leq a\}}_{\in \mathcal{F} \text{ wg. (v)}}^{C}}_{\in \mathcal{F}}$ (1/2)

Spezialfall:
$\mathcal{F} = \sigma(\Omega) = \{\varnothing, \Omega\}$
z.z.: (i) $\Leftrightarrow f \equiv a$ $(a \in \bar{\mathbb{R}})$

Bew.: „⇒“: für bel. $c \in \bar{\mathbb{R}}$ gilt nach Vor.:
$f^{-1}(\{c\}) = \{f = c\} \in \{\varnothing, \Omega\}$
Da $\{f = \tilde{c}\} = \Omega$ genau für ein $\tilde{c} \in \bar{\mathbb{R}}$ gelten muss, (1)
folgt die Beh. mit $a = \tilde{c}$

“⇐“: zeige (v) ($\Leftrightarrow$ (i))
Sei $c \in \bar{\mathbb{R}}$ bel.

$$\{f \leq c\} = \left\{ \begin{array}{ll} \varnothing, & \text{falls } c < a \\ \Omega, & \text{falls } c \geq a \end{array} \right\} \in \mathcal{F} \quad (1)$$

Aufgabe 10.2: Messbarkeit II (3 Punkte) (STO-Messbarkeit02 | 3)

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ ein Messraum und $f_i : \Omega \to \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}_0$ eine Folge $\mathcal{F} - \bar{\mathbb{B}}$-messbarer Abbildungen. Zudem sei $N : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine $\mathcal{F} - \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$S(\omega) := \sum_{i=0}^{N(\omega)} f_i(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

eine $\mathcal{F} - \bar{\mathbb{B}}$-messbare Abbildung auf Ω ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Äquivalenz (i) ⇔ (v) aus Aufgabe 8.1. und zerlegen Sie die auftretende Menge nach den Werten von N.

Lösung:
Nach 8.1 (v) ist nur zu zeigen:

$$\{S \le a\} \in \mathcal{F} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Dies gilt, da

$$\{S \le a\} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \{S \le a, N = n\}$$

(Zerlegung nach den Werten von N)

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \Bigg\{ \underbrace{\Big\{\sum_{i=0}^{n} f_i \le a\Big\}}_{\in\ \mathcal{F} \text{ nach VI.7 (Summen mb. Funktionen sind mb.)}} \cap \underbrace{\{N = n\}}_{\in\ \mathcal{F}} \Bigg\} \in \mathcal{F} \tag{2}$$

Aufgabe 10.3: Extremwertverteilungen (4 Punkte) (STO-Extremwertvtlg | 2)

Seien $X_1, \ldots, X_n \quad (n \in \mathbb{N})$ unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man stelle die Verteilungsfunktionen von

(i) $\max(X_1, \ldots, X_n)$ und

(ii) $\min(X_1, \ldots, X_n)$

durch die Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$ dar.

Betrachten Sie nun unabhängige, exponential-verteilte Zufallsvariablen, d.h.
$F_i(t) = (1 - e^{-\lambda_i t}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \; \forall t \in \mathbb{R} \quad (\lambda_i \geq 0)$. Wie ist $\min(X_1, \ldots, X_n)$ verteilt?

Lösung:

(i)

$$\begin{aligned} F_{max}(t) :&= P\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq t\right) \\ &= P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ X_i \text{ st. unabh.}}}{=} \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \leq t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \end{aligned}$$

3/2

(ii)

$$\begin{aligned} F_{min}(t) :&= P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq t\right) \\ &= 1 - P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > t\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > t, \ldots, X_n > t\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ X_i \text{ st. unabh.}}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i > t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_i(t)\right) \end{aligned}$$

3/2

Spezialfall: Exponentialvtlg.

$$F_i(t) = \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii)}}}{\Rightarrow} F_{min}(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nachweis mit} \\ \text{Falluntersch.}}}{=} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) = \left(1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t}\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$$

$\Rightarrow$ Das Minimum ist $\mathrm{Exp}_{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$-verteilt. 1

Interpretation:
Wenn an n Warteschlangen Kunden jeweils mit Ankunftsraten $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ankommen, ist die Wartezeit auf den ersten Kunden so verteilt wie die Wartezeit auf den ersten Kunden an einer Warteschlange bei einer Ankunftsrate von $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Aufgabe 10.4: Monte-Carlo-Methode zur Schätzung von Pi (R) (4 Punkte) (STO-MonteCarloPi | 2)

Erzeugen Sie mit R zweimal je n ($n \in \mathbb{N}$) $U_{[0,1]}$-verteilte Zufallszahlen (also n zufällige Punkte in der Menge $[0,1] \times [0,1]$) und schätzen Sie mit diesen Zahlen die Zahl π. Wie hängt die „Genauigkeit“ der Schätzung von der Anzahl n ab?

Hinweis: Betrachten Sie einen geeigneten Viertelkreis im Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ und zählen Sie, wie viele der zufälligen Punkte im Viertelkreis landen. Das Verhältnis der Treffer zur Gesamtzahl aller Punkte hat etwas mit π zu tun.

Lösung:

```
# ##############################################################################
#
# Name:       schaetze_pi
#
# Aufgabe:    Schätzt die Kreiszahl Pi mit der Monte-Carlo-Methode
#
# Parameter: n.sim  Anzahl der Simulationen
#
# Rückgabewert: Schätzer für Pi
#
# ##############################################################################
schaetze_pi <- function(n_sim)
{
   r <- runif ( n_sim, 0, 1 )
   s <- runif ( n_sim, 0, 1 )
   t <- r^2+s^2 # quadrierter Abstand zum Ursprung

   return( length( t[t<1] ) / n_sim * 4 ) # dies ist ein Schätzer für Pi,
   # da der Flächenanteil des Viertelkreises am Einheitsquadrat Pi/4 beträgt
}

erg <- matrix( 0, nrow = 10, ncol = 6) # Matrix
for (i in 1:10)
  erg[i,] <- Vectorize(schaetze_pi)(10^(1:6))

# Rechne die üblich Abweichung (=Std.abw.) für jede Simulationsanzahl aus
apply(erg, 2, sd)

[1] 0.50066622 0.09697651 0.04970312 0.02029367 0.00537877 0.00135442

# man sieht, dass die Genauigkeit bei Verzehnfachung um sqrt(10)=3,2 besser wird
# (bei Verhundertfachung wird es zehnmal genauer)
```

Aufgabe 10.5: Positiv-/Negativteil (1 Punkte) (STO-PositivNegativTeil | 1)

Zerlegen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto (x-3)^3$ in Positiv- und Negativteil.

Lösung:
Für $f : x \mapsto f(x) = (x-3)^3$ gilt $f(x) > 0$ für alle $x > 3$ und $f(x) < 0$ für alle $x < 3$. Somit ist

$$f_+(x) = (x-3)^3 \cdot \mathbb{1}_{(3,\infty)}(x) \text{ und } f_-(x) = -(x-3)^3 \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,3)}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. (1)

Aufgabe 10.6: Lebesgue vs. Riemann (3 Punkte) (STO-LebesgueVsRiemann | 1)

In einer Kirchengenmeinde wirft jede Besucherin nach der Messe genau ein Geldstück in einen Sammelkorb. Mit der Funktion:

$$f : \{1,2,\ldots,20\} \to \{0.5,1,2\}$$

wird chronologisch festgehalten, wie viel die i-te Besucherin gegeben hat. Es ergaben sich folgende Werte:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(i)$	2	0.5	1	2	2	0.5	1	2	1	1	1	2	1	1	0.5	2	1	0.5	2	2

Nun soll die Gesamtsumme der Spenden, das ist $\int_{\{1,2,\ldots,20\}} f(n) d\zeta_{\mathbb{N}}(n)$ berechnet werden.

Beschreiben Sie, wie man dieses Integral nach Riemann bzw. Lebesgue berechnet. Warum ist die Methode von Lebesgue geschickter?

Lösung:

Nach Riemann würde man rechnen:

$$\int_{\{1,2,\ldots,20\}} f(n) d\zeta_{\mathbb{N}} = 2+0.5+1+2+2+0.5+1+2+1+1+1+2+1+1+0.5+2+1+0.5+2+2$$

Man müsste also zwanzig Werte nacheinander aufaddieren.
Nach Lebesgue würde man die Münzen zuerst nach ihrem Wert sortieren und dann das Intergal berechnen. Da es vier 50Ct-, acht 1€- und acht 2€-Münzen waren, ergibt sich nach Lebesgue:

$$\int_{\{1,2,\ldots,20\}} f(n) d\zeta_{\mathbb{N}} = 4 \cdot 0.5 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2.$$

Das ist viel übersichtlicher, weniger zu rechnen und damit geschickter. (3)