p-Wert

Def.: Der „p-Wert" eines Testproblems ist die Wahrscheinlichkeit dafür, den Wert der Prüfgröße oder etwas in Richtung der Alternative Extremeres unter der Nullhypothese zu beobachten

Bsp.: Sie warten vor dem Kino auf ihren Freund. Weil das nicht zum ersten Mal passiert ist, haben sie eine „Meinem Freund seine Nachteile"-Mappe angelegt, in die sie die Minuten eintragen, die er bei jedem Kinobesuch zu spät kam. Dabei bedeutet ein neg. Vorzeichen, dass er vor ihnen da war: 3, 2, 4, -1, 5.5

Sie überlegen, deswegen Schluss mit ihm zu machen, falls der p-Wert unter 5% ist.

Hinweis: Mgl. ZVn:

i	1	2	3	4	5
Y_i: gibt an, ob Freund beim i-te Besuch später kam als Sie	1	1	1	0	1
X_i: Verspätung beim i-ten Besuch	3	2	4	-1	5.5

Der „p-Wert" eines Testproblems ist die Wahrscheinlichkeit dafür, den Wert der PG oder etwas in Richtung der Alternative Extremeres unter H_0 zu beobachten.

Modell	H_0	PG	p-Wert
„Münzwurf": $Y_1,\dots,Y_5$ u.i.v. gem. $B_{1,p}$	$p \le 0.5$	$\sum_{i=1}^{5} Y_i$	$P_{p=0.5}(\sum Y_i \ge 4) = B_{5,0.5}(\{4,5\}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 18{,}75\%$
„Gauß": $X_1,\dots,X_5$ u.i.v. gem. $N_{\mu,4}$	$\mu \le 0$	$\frac{\bar{X}}{2/\sqrt{5}}$	$P_{\mu=0}(\frac{\bar{X}}{2/\sqrt{5}} \ge \underbrace{\frac{13.5}{5}/\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\approx 3.0}) = N_{0,1}((3,\infty)) \approx 0{,}15\%$ (↑ σ-Bereiche)
„t": $X_1,\dots,X_5$ u.i.v. gem. N_{μ,σ^2}	$\mu \le 0$	$\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{5}}$	$P_{\mu=0}(\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{5}} \ge \underbrace{\frac{13.5}{5}/\frac{2.4}{\sqrt{5}}}_{\approx 2.5}) \approx t_4((2.5,\infty)) = 1 - pt(2.5,4) \approx 3.3\%$

$$S = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left((3-\tfrac{13.5}{5})^2 + \dots\right)} \approx 2.4$$

ABC-Spiel

① Vier anonyme Tortenfreunde aus Göggingen probieren eine neue, von WiPsys der THA entwickelte, evidenzbasierte Diät, von der in Studien nachgewiesen wurde, dass die Standardabweichung 1kg beträgt. Nach einem Jahr haben sie im Schnitt 1 kg abgenommen.

Die Gewichtsabnahme ist signifikant mit einem p-Wert von:

A: 10 % B: 5 % C: 2,5 % D: 1 %

Lösung: Sei x_i die Gewichtsabnahme des i-ten Tortenfreunds $(i = 1,..,4)$.

Es gilt: $\bar{x} = 1$ [kg]

Wir betrachten die x_i als Realisierungen von st. unab., $N_{\mu,1}$-vlt.en ZV.

TP: $\mu \leq 0$ vs $\mu > 0$ (Gauß-Test, da σ_0^2 bekannt)

$$PG = \frac{\bar{x} - 0}{\sigma_0/\sqrt{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$p\text{-Wert} = \underset{\mu=0}{P}(PG \geq 2) = N_{0,1}([2, \infty))$$

(2) Eine Münze wird zehnmal geworfen. Achtmal erscheint Zahl. Sie wollen nachweisen, dass die Münze prinzipiell mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit auf Zahl fällt.

Wie groß ist der p-Wert des zug. Testproblems?

A: $B_{10,0.9}(\{8,9,10\}) = 93\%$ B: $B_{10,0.5}(\{0,\dots,7\}) = 94.5\%$ C: $B_{10,0.5}(\{8,9,10\}) = 5.5\%$

(0 = Kopf, 1 = Zahl)

Lösung: Wir betrachten die Summe der Münzwürfe als Realisierung einer ZV X, die $B_{10,p}$-vtlt. ist.

TP: $p \leq 0.5$ vs. $p > 0.5$

PG = Anzahl Zahl = 8

$$p\text{-Wert} = P_{p=0.5}(X \geq 8) = B_{10,0.5}(\{8,9,10\}) \Rightarrow \boxed{C}$$

③ Eine Münze wird zehnmal geworfen. Achtmal erscheint Zahl. Sie wollen nachweisen, dass die Münze unfair ist, also nicht zu 50% auf jede Seite fällt.

Wie groß ist der p-Wert des zug. Testproblems?

A: $B_{10,0.5}(\{8,9,10\}) = 5.5\%$ B: $B_{10,0.5}(\{0,\dots,7\}) = 94.5\%$ C: 11%

Lösung: Gleiches Modell wie bei ②

TP: $p = 0.5$ vs. $p \neq 0.5$

PG = 2

$$p\text{-Wert} = P_{p=0.5}(X \geq 8 \text{ oder } X \leq 2) \overset{\uparrow}{=} 2 \cdot B_{10,0.5}(\{8,9,10\}) = 11\%$$

$2 B_{10,0.5}$

Sym. der $B_{10,0.5}$ - Vtlg.

(4) Der p-Wert eines Tests H_0 gg. H_1 sei 99%.

Dies bedeutet, dass die Nullhypothese zu 99% richtig ist.

Lsg.: Falsch, über die WsK., dass H_0 richtig ist, kann nichts ausgesagt werden.

Man kann nur sagen: Wenn H_0 richtig ist, tritt der Beob.wrt. oder etwas in Richtung der Alternative extremeres zu 99% auf.